浅论分形几何学

李映真

中山大学，数学与计算科学学院，09378052

摘要

本文介绍了分形几何学的起源、基本理论和应用，具体讨论了 Mandelbrot 集和 Julia 集的性态与联系以及 Koch 曲线、雪花和 Sierpinski 三角形的分形维数，并介绍了分形几何学的主流应用和一些前沿研究的结果。

1 前言

分形[1] [2]（fractal）一门以非规则几何形态为研究对象的几何学，，由曼德勃罗（B.B.Mandelbrot）等人创立并命名，名称来自拉丁文 frāctus，取“零碎”、“破裂”之意。通常意义下，分形被定义为迭代地将一个确定的几何形状（定义为元图像）在其边上生成为（至少近似地）与元图像的形状。从整体上看，分形几何图形没有规则表示。但在局部观察下，图形的规则性又是相同的，即具有自相似的性质。当然，也有一些分形几何图形，它们并不完全是自相似的，可能相差某个仿射变换（如旋转、拉伸等）。它们其中一些是用来描述一般随机现象的，还有一些是用来描述混沌和非线性系统的。

传统欧式几何的研究对象绝大多数为规则且光滑的几何图形，如直线、曲线、曲面等，但是由于不规则现象在自然界是普遍存在的，而且大多数情况下它们不能被抽象为欧式几何中的对象，因此分形几何在其他学科中有着广泛的应用，它不仅在理论上，而且在实用上都具有重要价值。分形有几种类型，可以分别依据表现出的精确自相似性、半自相似性和统计自相似性来定义。虽然分形是一个数学构造，它们同样可以在自然界中被找到，这使得它们被划入艺术作品的范畴。分形在医学、土力学、地震学和技术分析中都有应用。

2 经典分形

2.1 Mandelbrot 集

Mandelbrot 在开创分形几何学时发现了一个重要的集合，即 Mandelbrot 集[3]，而后后人在研究 Mandelbrot 集时又发现了 Julia 集[4]。Mandelbrot 集和 Julia 集定义类似，二者之间具有相互的相似性。

Mandelbrot 集 M 由一个复值函数集合的参数 c 定义[3]：

$$P_c : C \to C$$

其中

$$P_c : z \to z^2 + c$$

这里 c 为负数. c决定了 Madelbrot 集的迭代行为：

$$(z_0, P_c(z_0), P_c(P_c(z_0)), P_c(P_c(P_c(z_0))), \ldots)$$

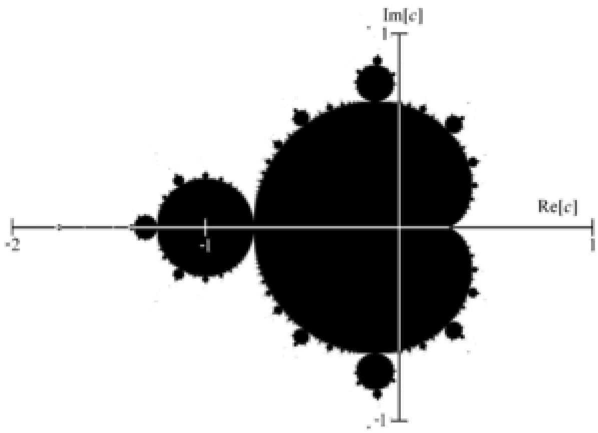
这里表示了一串从 $z = z_0$ 开始迭代的序列 $P_c(z_0)$，该序列可能发散到模无穷，或者被限制在一个定长的复平面圆盘中。 Mandelbrot 集 定义为所有满足 $P_c(z)$ 序列有界的c的集合。.

进一步解释, 若 $P_c^n(z)$ 表示 $P_c(z)$ 的第 n 次迭代元(即 $P_c(z)$ 序列的第 n+1 个元), 那么 Mandelbrot 集 M 是一个复平面的子集，定义为：

$$M(z_0) = \{c \in C : \exists s \in R, \forall n \in N, |P_c^n(z_0)| \le s\}$$

称为 z_0 对应的 Mandelbrot 集

绘制 Mandelbrot 集图如下：



图一 Mandelbrot 集，$z_0 = 0$

2.2 Julia 集

Julia 集 J 的定义[4]与 Mandelbrot 集类似但有不同，其定义为：

$$(z, P_c(z), P_c(P_c(z)), P_c(P_c(P_c(z))), \ldots)$$

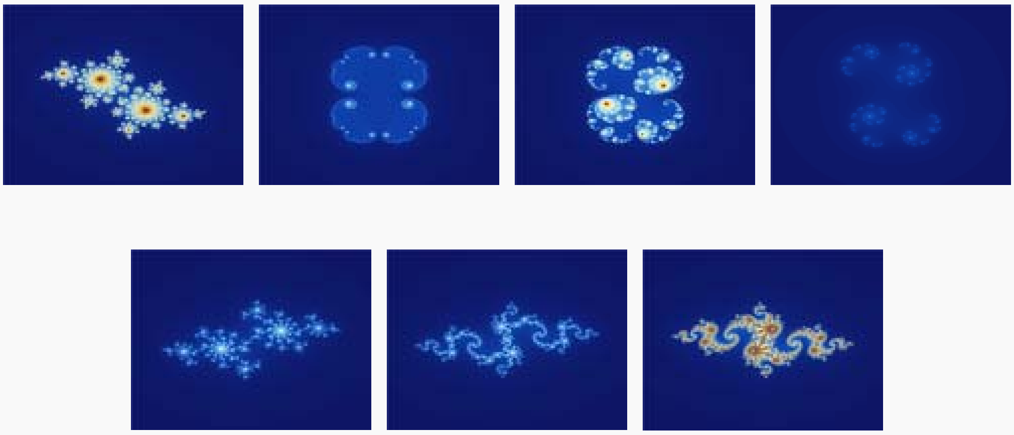
这里表示了一串从某一 z 开始迭代的序列 $P_c(z)$ ，其中c是取定的某一复值。同 Mandelbrot 集的序列，该序列可能发散到模无穷，或者被限制在一个定长的复平面圆盘中。Julia 集 定义为在某一固定的c下所有满足 $P_c(z)$ 序列有界的 z 的集合。.

进一步解释，若 $P_c^n(z)$ 表示 $P_c(z)$ 的第 n 次迭代元(即 $P_c(z)$ 序列的第 n+1 个元)，那么 Julia 集 J 是一个复平面的子集，定义为：

$$J=\{z\in C:\exists s\in R,\forall n\in N,|P_c^n(z)|\leq s\}$$

Mandelbrot 集也可以定义为 $P_c(z)$ 的连通迹，也就是 Julia 集的参数 c 的连通集。

用不同的参数 c 绘制 Julia 集如下图：



图二 绘制 Julia 集，其中各子图的 c 分别为

-0.4+0.6i, 0.285, 0.285+0.01i, 0.45+0.1428i, -0.70176-0.3842i, -0.835-0.2321i 和-0.8+0.156i

定义 $c=x+yi$，研究当 x 和 y 变化时 Julia 集图像变化得到以下结论：

（1）当 $x>0$ 时，x 增长时图像在 x 轴方向被压缩；

（2）当 $x<0$ 时，x 减小时图像在 y 轴方向被压缩；

（3）当 $y>0$ 时，y 增长时图像在 y=x 直线方向被压缩；

（4）当 $y<0$ 时，y 减小时图像在 y=-x 直线方向被压缩。

改变画图区间 $[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]$，发现细节部分除了旋转角度的差别外，图像具有自相似性。

进一步研究 c 在 Mandelbrot 集 $M(0)$ 内、外取值时 Julia 集的性态，得到以下结论：

（1）当 c 在 $M(0)$ 内部时 Julia 集是单连通的；

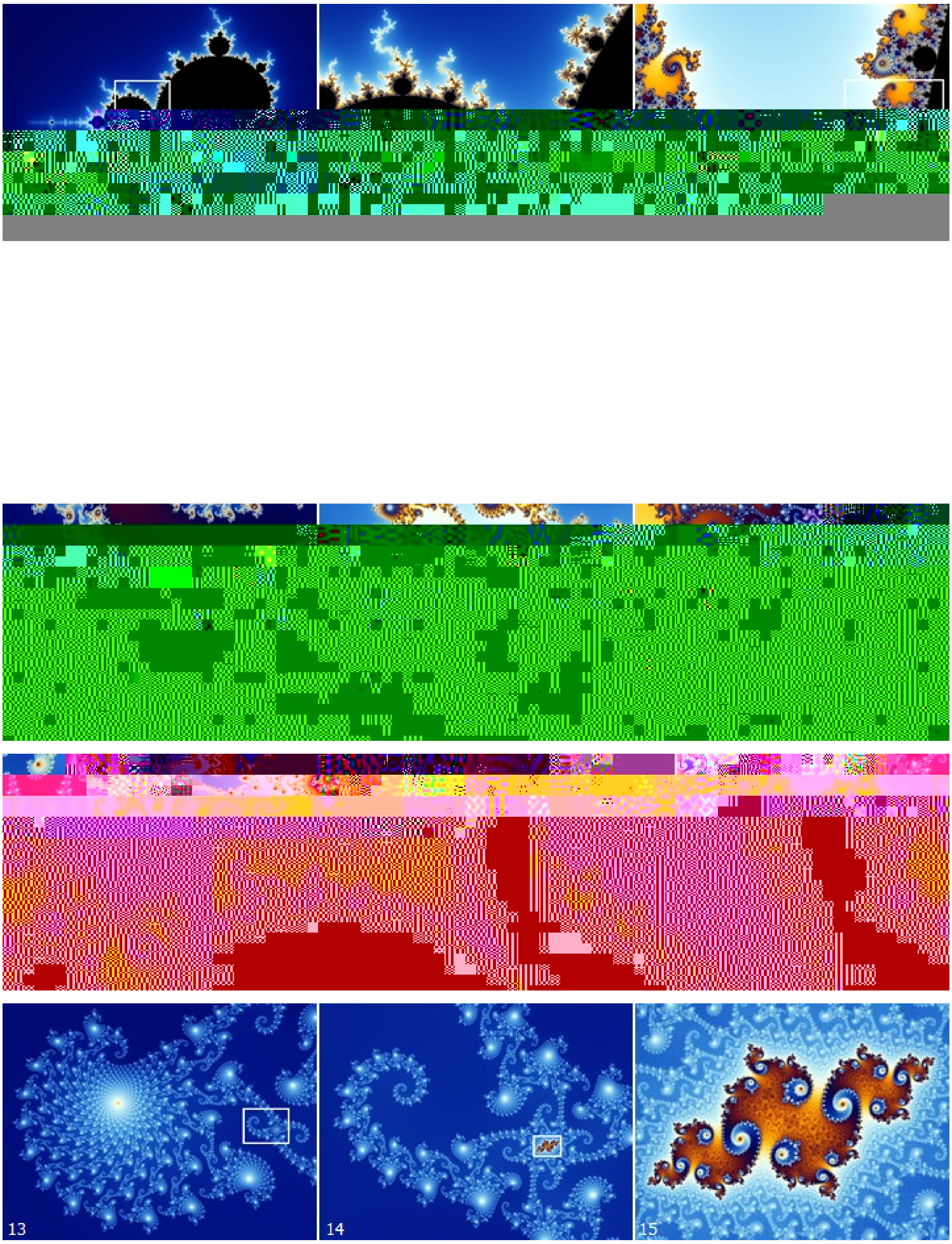
（2）c 在 $M(0)$ 内部且逐渐靠近 $M(0)$ 边界时 Julia 集逐渐缩小；

（3）当 c 在 $M(0)$ 外部时 Julia 集是多连通的；

（4）c 在 $M(0)$ 外部且逐渐远离 $M(0)$ 边界时 Julia 集逐渐缩小趋于消失。

2.3 Mandelbrot 集和 Julia 集的相似性

Mandelbrot 集的图像局部与 Julia 集具有相似性，通过作图[5]可以看出 Mandelbrot 集和 Julia 集之间的关系：



图三 放大 Mandelbrot 集

从中我们可以看出，Mandelbrot 集的图像放大后局部具有自相似性，如图三的子图 8 便与子图 1 具有高度的相似性。而且在 Mandelbrot 集放大的局部可以观察到与 Julia 集相似的行为，如子图 7 和子图 15，分别相似与不同参数 c 下的 Julia 集。

3 分形的维数理论

3.1 概述

在分形几何中，分形维数是一个描述一个分形对空间填充程度统计量。分数维没有统一的定义。主要的分数维定义方法有 Hausdoff 维数[6]、计盒维数[7]和分配维数等。

Hausdoff 维又称作 Hausdorff-Besicovitch 维，它是由数学家 Hausdoff 于 1918 年引入的。通过 Hausdoff 维可以给一个任意复杂的点集合比如分形（Fractal）赋予一个维度。对于欧式几何中的简单目标比如线、长方形、长方体等 Hausdoff 维等同于它们通常的几何维度（拓扑维度）。通常来说一个物体的 Hausdoff 维不像拓扑维度一样总是一个自然数而可能会是一个非整的有理数或者无理数。

设想有一个由三维空间内具有有限大小的点组成的集合，N 是用来覆盖这个集合内所有点所需的半径为 R 的球体的最少个数，则这个最小数 N 是 R 的一个函数，记作 N(R)。显然 R 越小则 N 越大，假设 N(R)和 Rd 之间存在一个反比的关系，我们把这个关系记作

$$N(R) \propto \frac{1}{R^d}$$

当 R 趋向于 0 时，我们得到

$$\dim_{Haus} = -\lim_{R \to 0} \log_R N(R)$$

这里的 d 就是这个集合的 Hausdoff 维。

计盒维数也称为盒维数、Minkowski 维数，是一种测量距离空间(X, d)（特别是 Hausdoff 空间）比如欧氏空间 Rn 中分形维数的计算方法。

要计算分形 S 的维数，可以想象一下把这个分形放在一个均匀分割的网格上，数一数最小需要几个格子来覆盖这个分形。通过对网格的逐步精化，查看所需覆盖数目的变化，从而计算出计盒维数。

假设当格子的边长是 ε 时，总共把空间分成 N 个格子，那么计盒维数就是：

$$\dim_{box} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

当极限不收敛时，我们必须指出顶盒维数或底盒维数，或者说，计盒维数仅在和顶盒维数与底盒维数相等时才是有定义的。

计盒维数和 Hausodff 维数存在如下不等式：

$$\dim_{Haus} \leq \dim_{lowerbox} \leq \dim_{upperbox}$$

一般的这两个不等式可能是严格不等的。

为了说明分形维数理论，接下来将给出具体的例子：Koch 曲线、雪花(star)[6]和 Sierpinski 三角形[7]。

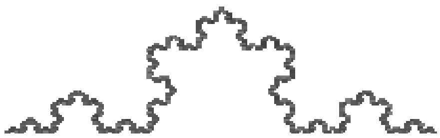
3.2 实例： Koch 曲线、雪花

Koch 曲线和雪花的定义：

给定线段 AB，Koch 曲线可以由以下步骤生成：

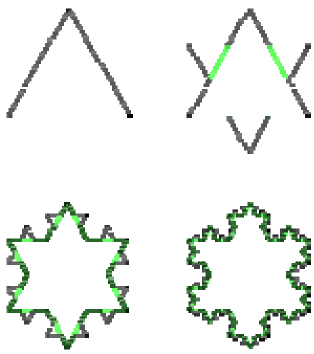
1. 将线段分成三等份（AC,CD,DB）
2. 以 CD 为底，向外（内外随意）画一个等边三角形 DMC
3. 将线段 CD 移去
4. 分别对 AC,CM,MD,DB 重复 1~3 步骤若干次。

生成的 Koch 曲线如图所示：



图四 Koch 曲线，迭代次数=4

给定三角形 ABC，Koch 雪花是由分别对 AB、BC、CA 三条线段生成 Koch 曲线所得如图：



图五 Koch 雪花，子图依次为原三角形以及迭代 1-3 次的图形

Koch 曲线和 Koch 雪花的分形维数显然一致，这里只讨论 Koch 曲线：

不妨设 AB=2,计算 Hausodff 维数，容易得到：

$$N(R) = 4^n, 当 R = 3^{-n}$$

由此可得

$$\dim_{Haus} = -\lim_{R \to 0} \log_R N(R) = -\lim_{n \to \infty} \log_{3^{-n}} 4^n = \frac{\log 4}{\log 3}$$

计算计盒维数：令 AB=1，容易得到：

$$N(\varepsilon) = 4^n, 当 \varepsilon = 3^{-n}$$

由此可得

$$\dim_{box} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{\log 4}{\log 3}$$

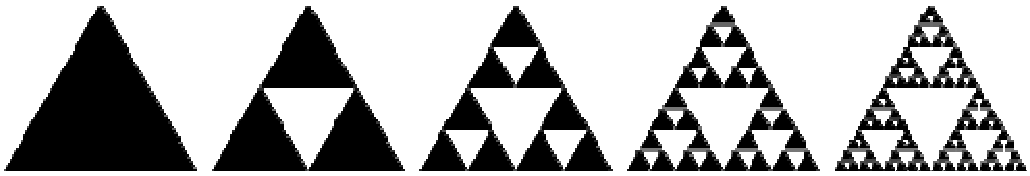
即 Koch 曲线和雪花的 Hausdoff 维数与计盒位数一致。

3.3 实例： Sierpinski 三角形

Sierpinski 三角形的定义：

构造 Sierpinski 三角形有三种方法：

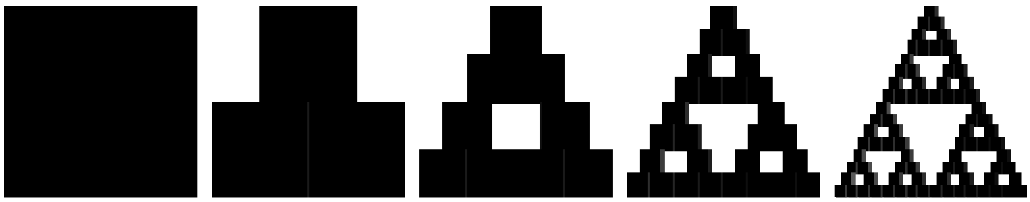
方法一



1. 取一个实心（图中标记为黑色）的三角形。（多数使用等边三角形）
2. 沿三边中点的连线，将它分成四个小三角形。
3. 去掉中间的那一个小三角形。
4. 对其余三个小三角形重复 1。

方法二

取一个正方形或其他形状开始，用类似的方法构作，形状也会和谢尔宾斯基三角形相近：



方法三

使用 L 系统来逼近 Sierpinski 三角形

下面计算 Sierbinski 三角形的分形维数：

不妨设三角形边长为$\sqrt{3}$,计算 Hausdoff 维数，容易得到：

$$N(R)=3^n,\text{当}R=2^{-n}$$

由此可得

$$\dim_{Haus}=-\lim_{R\to 0}\log_R N(R)=-\lim_{n\to\infty}\log_{2^{-n}}3^n=\frac{\log 3}{\log 2}$$

计算计盒维数：令三角形边长为 1，容易得到：

$$N(\varepsilon)=3^n,\text{当}\varepsilon=2^{-n}$$

由此可得

$$\dim_{box}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log 3^n}{\log 2^n}=\frac{\log 3}{\log 2}$$

即 Sierpinski 三角形的 Hausdoff 维数与计盒位数一致。

4 分形的应用

分形在许多基础学科和工程学科具有广泛应用。一些主流的应用[2]列出如下：

- 医学中组织切片的归类
- 分形风景或海岸线复杂性
- 酵素/酵素学（米曼氏动力学）
- 制作许多的艺术形式，如音乐、服饰等
- 计算机科学中的档案压缩、图像压缩
- 地震学、土壤力学，断口分析和断裂力学
- 电脑及电视游戏设计，尤其是有机背景的 CG 和部份的过程生成
- 分形天线 - 使用分形形状的小尺寸天线
- 小角度 X 光散射
- 伪装图样的制作，如 MARPAT
- 数位日晷
- 价格序列的技术分析

在 2012 年新发表的研究结果中 ,Hung-Cheng Chen 等[10]提取了 PD 特征的分形维数，并提出了一个基于小脑模型控制器（CMAC）新的局部放电（PD）

的模式识别方法。Izabela M. Barszczewska-Rybarek 等[11]估计分形特征与聚合物密度，硬度和冲击强度的联系，他们认为与力学性能有关的形态学研究是有意义的，并认为分形分析可以成为牙科材料的设计和开发的关键要素之一。

5 结论

本文讨论了分形几何学的起源，具体讨论了经典复平面分形（Mandelbrot 集和 Julia 集）的性态。通过计算分形几何的分形维数，我们可以对不规则物体的空间占有量进行估计，并且给出了 Koch 曲线、雪花和 Sierpinski 三角形的分形维数。分形几何学是当前数学发展的一个新兴分支，讨论了离散维数空间中非规则几何形状的空间占有量（即长度、面积、体积）的量度问题，并且已经在自然界与物理学中得到了一些好的应用结果。

6 致谢

本文的大部分理论表述和计算结果来自作者选修中山大学数学与计算科学学院黎培兴副教授开设的《数学实验与数学软件》实验报告，在此对黎培兴副教授表示感谢。

7 参考文献

[1]分形，百度百科 http://baike.baidu.com/view/83243.htm
[2]分形，维基百科 http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%88%86%E5%BD%A2
[3]Mandelbrot set, WIKI http://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set
[4]Julia set, WIKI http://en.wikipedia.org/wiki/Julia_set
[5]神奇的分形艺术（四）: Julia 集和 Mandelbrot 集，Matrix67 http://www.matrix67.com/blog/archives/292
[6]豪斯多夫维数 http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%B1%AA%E6%96%AF%E5%A4%9A%E5%A4%AB%E7%BB%B4%E6%95%B0
[7]计盒位数 http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%AE%A1%E7%9B%92%E7%BB%B4%E6%95%B0
[8]科赫曲线，维基百科 http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%A7%91%E8%B5%AB%E6%9B%B2%E7%BA%BF
[9] 谢尔宾斯基三角形 http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%AC%9D%E7%88%BE%E8%B3%93%E6%96%AF%E5%9F%BA%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2

[10]Hung-Cheng Chen, Feng-Chang Gu, Pattern recognition with cerebellar model articulation controller and fractal features on partial discharges, Expert Systems with Applications, Volume 39, Issue 7, 1 June 2012, Pages 6575–6584
[11] Izabela M. Barszczewska-Rybarek, Monika Krasowska, Fractal analysis of heterogeneous polymer networks formed by photopolymerization of dental dimethacrylates, Dental Materials, Volume 28, Issue 6, June 2012, Pages 695–702